佐賀大学

2017年 教育学部 第1問

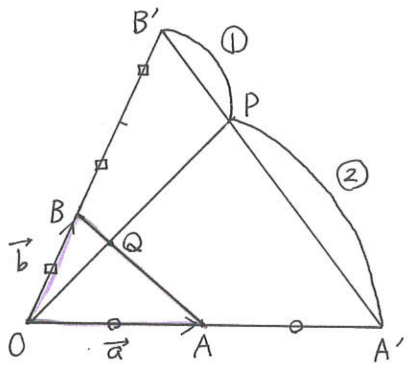
増田

1 平面上に三角形OABがあり，点A′，B′は$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$を満たしているとする．線分A′B′を2:1に内分する点をPとし，線分OPと線分ABの交点をQとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$および$\vec{b}$を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}$を求めよ．

(3) $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$であり，さらに$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AB}$が直交しているとき，三角形OABの面積および三角形PABの面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA'}+2\overrightarrow{OB'}}{2+1}$

$=\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+2\times3\vec{b})$

$=\underline{\dfrac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}}$ //

(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ (k:実数)とおく。

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}k\vec{a}+2k\vec{b}$

Qは直線AB上にあるので、

$\dfrac{2}{3}k+2k=1$

$\therefore k=\dfrac{3}{8}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OP}$より、$\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\underline{\dfrac{3}{8}}$ //

(3) $\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}\text{と}\overrightarrow{AB}\text{が直交}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{a}\cdot\vec{b}\text{の値から、}\cos\angle BOA\to\sin\angle BOA\\ \text{を求める。}\end{array}}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot(-\vec{a}+\vec{b})$

$=-\dfrac{2}{3}|\vec{a}|^2-\dfrac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle BOA=2$ より

$\cos\angle BOA=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$

$\sin\angle BOA=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle BOA$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{11}}{2}}$ //

また、$\triangle OAB:\triangle PAB=OQ:QP$

$=3:5$

$\triangle PAB=\dfrac{5}{3}\triangle OAB$

$=\underline{\dfrac{5\sqrt{11}}{6}}$ //