2018年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \dfrac{a_n}{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

で定められているとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 4つの有理数 p，q，r，s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする．このとき，$p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい．

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと，$a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$（p_n および q_n は有理数）と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2)で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して，p_{n+1} と p_n が満たす関係式，および一般項 p_n を求めよ．