島根大学

2014年 総合理工（数理・情報システム）第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $a_1=2$ とし，$f(x)=x^2-3$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_1,\ f(a_1))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_2 とする．以下同様に，$n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_{n-1},\ f(a_{n-1}))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_n とする．数列 $\{a_n\}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) a_2 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) $a_n \geqq \sqrt{3}$ を示せ．

(4) $a_n-\sqrt{3} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$ を示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $f'(x)=2x$ より．$(2,1)$ における接線は $y=4(x-2)+1$

$\therefore\ 0=4a_2-7$ $\qquad \therefore\ \underline{a_2=\frac{7}{4}}$ //

(2) 同様に，$(a_n,\ a_n^2-3)$ における接線は $y=2a_n(x-a_n)+a_n^2-3$

$\therefore\ 0=2a_na_{n+1}-a_n^2-3$ $\qquad \therefore\ \underline{a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+3}{2a_n}}$ //

帰納的に $a_n>0$

よって $a_n\neq 0$ なので

(3) $a_1=2\geqq\sqrt{3}$ かつ $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{3}{2a_n}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a_n}{2}\cdot\dfrac{3}{2a_n}}=\sqrt{3}\quad(n\geqq 1)$

$a_n>0$ よりともに正　相加・相乗平均の関係

あわせて．$a_n\geqq\sqrt{3}$ ■

(4) (2) より．$a_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{a_n^2+3}{2a_n}-\sqrt{3}$ $\iff a_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{a_n^2-2\sqrt{3}a_n+3}{2a_n}$

$\iff a_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{(a_n-\sqrt{3})^2}{2a_n}$

$\iff a_{n+1}-\sqrt{3}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2a_n}\right)(a_n-\sqrt{3})$

ここで，$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2a_n}\leqq\dfrac{1}{2}$ より $a_{n+1}-\sqrt{3}\leqq\dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

$\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^2(a_{n-1}-\sqrt{3})$

$\vdots$

$\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(a_1-\sqrt{3})$

はさみうちの原理より

$0\leqq a_n-\sqrt{3}\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$ ■ $\to 0$ $\qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n-\sqrt{3}=0$ $\qquad \therefore\ \underline{\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{3}}$ //