2014年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 a, b, c $(b \neq 0)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 2次方程式 $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ は異なる2つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1)の2つの実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とする．x についての恒等式

$$(x+p)(x-\alpha)-(x+q)(x-\beta)=1$$

が成り立つとき，定数 p, q を α, β を用いて表せ．

(3) 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ と (2) の α, p に対して，$B=(A+pE)(A-\alpha E)$ とおく．このとき，$B^2=B$ であることを示せ．ただし，E は2次の単位行列である．

(1) 判別式を D とおくと.

$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)$$

$$=(a-c)^2+4b^2$$

$b \neq 0$ より. $D>0$ となり.

異なる2つの実数解をもつ ■

(2) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=a+c$, $\alpha\beta=ac-b^2$

用意したけど使わなかった

$$\therefore x^2-(\alpha-p)x-\alpha p-x^2-(q-\beta)x+\beta q-1=0$$

$$\therefore (p-q-\alpha+\beta)x-\alpha p+\beta q-1=0$$

$$\therefore \begin{cases} p-q-\alpha+\beta=0 \\ \alpha p-\beta q+1=0 \end{cases}$$

これを解いて. $\begin{cases} p=\dfrac{1}{\beta-\alpha}-\beta \\ q=\dfrac{1}{\beta-\alpha}-\alpha \end{cases}$ //

(3)

$$\cancel{B=\begin{pmatrix} a+p & b \\ b & c+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-\alpha & b \\ b & c-\alpha \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{=\begin{pmatrix} (a+p)(a-\alpha)+b^2 & b(a+p+c-\alpha) \\ b(a-\alpha+c+p) & b^2+(c+p)(c-\alpha) \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\therefore \mathrm{tr}(B)=2b^2+(a+p)(a-\alpha)}$$

(3). ケーリー・ハミルトンの定理より.

$$A^2-(\overset{\alpha+\beta}{a+c})A+(\overset{\alpha\beta}{ac-b^2})E=O$$

$$\therefore B=(a+c)A-(ac-b^2)E+(p-\alpha)A-p\alpha E$$

$$B=(a+c+p-\alpha)A-(ac-b^2+p\alpha)E$$

$$\therefore B=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot A-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}E$$

よって.

$$B^2=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}A^2-\frac{2\alpha}{(\beta-\alpha)^2}A+\frac{\alpha^2}{(\beta-\alpha)^2}E$$

$$=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left\{(\alpha+\beta)A-\alpha\beta E\right\}-\frac{2\alpha}{(\beta-\alpha)^2}A+\frac{\alpha^2}{(\beta-\alpha)^2}E$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}A-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}E$$

$$=B$$ ■