

2011年医学部第1問

1 以下の問いに答えよ。

(1) 関数

$$f(x) = x \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最大値を与える x を α とするとき、 $f(\alpha)$ を α の分数式で表すと となる。

(2) 多項式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

を因数分解すると となる。

(3) N を与えられた自然数とし、 $f(x)$ および $g(x)$ を区間 $(-\infty, \infty)$ で N 回以上微分可能な関数とする。 $f(x)$ と $g(x)$ から定まる関数を次のように定義する。 t を与えられた実数として、

$$\begin{aligned} (f *_t g)(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{t}{2} f'(x)g'(x) + \cdots + \frac{t^N}{2^N N!} f^{(N)}(x)g^{(N)}(x) \end{aligned}$$

とおく。ここに、 $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数である ($g^{(k)}(x)$ も同様である)。 a を実数、 n を N 以下の自然数とする。 $f(x) = e^{2ax}$ 、 $g(x) = x^n$ にたいし、二項定理を用いて $(f *_t g)(x)$ を計算すると となる。

(4) 関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t)e^{x-t} dt = \sin x$$

をみたす微分可能な関数 $f(x)$ を考える。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると、 $f'(x) =$ となる。
 $f(0) =$ であるから $f(x) =$ となる。