

2014年学芸(数学)第1問



1 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$ の最大値, 最小値を求めよ。ただし, 最大値, 最小値をとる θ の値は求めなくてよい。
- (2) 無限級数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$ の和を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2\theta - \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot \cos 2\theta + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \sin 2\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \sqrt{2} \left\{ \sin 2\theta \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \cos 2\theta \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \sqrt{2} \sin(2\theta + \alpha) \quad \left(\begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$\therefore y$ の最大値は $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, 最小値は $-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ //

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{与式}) &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{10}} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{25}{48} //
 \end{aligned}$$