# 埼玉大学

2017年 理学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $n$ を自然数とする．三角関数の加法定理を用いて，等式

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

を導け．

(2) $\cos 2\theta = T_2(\cos\theta)$，$\cos 3\theta = T_3(\cos\theta)$ を満たす整式 $T_2(x)$，$T_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(3) 自然数 $n$ に対し，$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ を満たす整数係数の $n$ 次の整式 $T_n(x)$ が存在することを示せ．

(4) 自然数 $k$ に対し，$\cos\dfrac{\pi}{4k}$ は無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．