会津大学

2014年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ a, b を実数の定数とする．関数 $f(x)=-x^3+3x^2+ax+b$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件を求めよ．

(2) $f(x)$ が $x=p$ で極大，$x=q$ で極小となり，かつ $p^2+q^2=10$ が成り立つとする．このとき，a, p, q の値を求めよ．

(3) (2) において，方程式 $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつための条件を求めよ．

(1) $f'(x)=-3x^2+6x+a$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となる異なる2つの実数解が存在することが必要なので

判別式 $D/4=9-(-3)\cdot a$

$=9+3a>0$ $\quad\therefore a>-3$

逆に $a>-3$ をみたすとき，$f'(x)=0$ の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$\alpha+\beta=2$ より $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$

$f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=f'(1)=a+3>0$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって右の増減表より，極大値と極小値をもつ

$\therefore$ $\underline{a>-3}$ //

(2) (1)より，$p+q=2$ $\quad\therefore p^2+(2-p)^2=10$

$\therefore p^2-2p-3=0$ $\quad(p-3)(p+1)=0$ $\quad\therefore p=3,\ -1$

$(p,\ q)=(3,\ -1),\ (-1,\ 3)$ $\quad p>q$ より $\underline{p=3,\ q=-1}$ //

このとき，解と係数の関係より $pq=-\dfrac{a}{3}$ $\quad\therefore$ $\underline{a=9}$ //

(3) $\therefore$ $b-5<0$ かつ $b+27>0$

$\therefore$ $\underline{-27<b<5}$ //

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\searrow$

$b-5$ 極小 $\quad$ $b+27$ 極大