2012年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 曲線 $C : y = \log x$ 上に異なる2点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(b,\ \log b)$ をとり，C の A における接線と B における接線の交点について考える．次の問いに答えよ．

(1) 任意に与えられた $a > 1$ に対して，2本の接線の交点がちょうど直線 $x = 1$ 上にくるような b が唯一つだけ存在し，$b < 1$ であることを示せ．

(2) 2点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ \log \dfrac{1}{a}\right)$ $(a > 1)$ について，2本の接線の交点の x 座標が1より大きいか小さいかを調べよ．

(3) k を自然数とする．$a = 1 + \dfrac{1}{k}$ として (2) の結果を使って，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \log n \quad (n \geqq 2)$$