岐阜大学

2012年 第1問

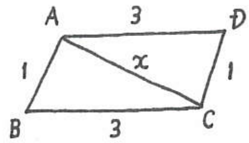
数理 石井K

$\boxed{1}$ 四角形ABCDにおいて AB = CD = 1，BC = DA = 3であり，対角線AC，BDの長さをそれぞれ x，y とする．以下の問に答えよ．

(1) 四角形ABCDの面積 S を x を用いて表せ．また，S の最大値 S_0 を求めよ．

(2) 面積が $\frac{1}{3}S_0$ である四角形ABCDに対して x^2，y^2 の値を求めよ．ただし，$x \leqq y$ とし，S_0 は(1)で求めたものとする．

(3) $\cos\angle ACB$ を x で表せ．また，$\angle ACB$ が最大となる x の値を求めよ．



(1) 四角形ABCDは平行四辺形で

$S = 2 \times \triangle ABC$ である．

三角形ABCの成立条件より，$1 + x > 3$ かつ $1 + 3 > x$

すなわち，$2 < x < 4$ …①

(別) ヘロンの公式を用いてもよい．

余弦定理より，$\cos B = \dfrac{1^2+3^2-x^2}{2\cdot1\cdot3} = \dfrac{10-x^2}{6}$

$\therefore \sin^2 B = 1 - \left(\dfrac{10-x^2}{6}\right)^2 = \dfrac{-x^4+20x^2-64}{36}$ $\quad \therefore \sin B = \dfrac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{6}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\sin B$

$\therefore \underline{S = \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^4+20x^2-64}}$ //

$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{-(x^2-10)^2+36}$

$\therefore$ S が最大となるのは，$x^2 = 10$ ①より，すなわち $x = \sqrt{10}$ のときで $\underline{S_0 = 3}$ //

(2) $S = \frac{1}{3}S_0 \iff \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^4+20x^2-64} = 1$

$\iff -x^4+20x^2-64 = 4$

$\iff x^4-20x^2+68 = 0$

$\therefore$ 解の公式より，$x^2 = 10 \pm 4\sqrt{2}$ ①より，$4 < x^2 < 16$ なのでともにみたす．

$x \leqq y$ より，$x^2 \leqq y^2$ なので，$\underline{x^2 = 10-4\sqrt{2}\ ,\ y^2 = 10+4\sqrt{2}}$ //

(3) 余弦定理より，$\cos\angle ACB = \dfrac{x^2+3^2-1^2}{2\cdot3\cdot x} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{4}{3x}$

$\dfrac{x}{6} > 0$，$\dfrac{4}{3x} > 0$ なので，相加・相乗平均の関係から，$\dfrac{x}{6} + \dfrac{4}{3x} \geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{6}\cdot\dfrac{4}{3x}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

等号成立は，$\dfrac{x}{6} = \dfrac{4}{3x} \iff x = 2\sqrt{2}$ $\quad \therefore \underline{\cos\angle ACB = \dfrac{x^2+8}{6x}\ ,\ 最大となる x は x = 2\sqrt{2}}$ //

①をみたす．