

2012年 医学部 第1問

1 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を次のように定義する.

$$\begin{cases} a_1 = 5, b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

また, 自然数  $n$  について  $c_n = a_n^2 - b_n^2$  とおく. このとき以下の各問いに答えよ.

- (1)  $c_n$  を  $n$  を用いて表せ.  
 (2)  $k$  を自然数とすると, 自然数  $l$  について

$$a_{k+l} = a_k a_l + b_k b_l, \quad b_{k+l} = b_k a_l + a_k b_l$$

が成立することを,  $l$  に関する数学的帰納法によって示せ.

- (3)  $n > l$  となる自然数  $n$ ,  $l$  について

$$b_{n+l} - c_l b_{n-l} = 2a_n b_l$$

が成立することを示せ.

- (4) 2 以上の自然数  $n$  について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ.