広島大学

2014年第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $\alpha > 1$とする．数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める．次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $a_n > 1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\sqrt{x}-1 \leqq \frac{1}{2}(x-1)$ （ただし，$x>1$とする.）

(3) $a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき $a_1 = \alpha > 1$ ∴成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．$a_k > 1$

このとき．$a_{k+1} = \sqrt{\frac{a_k+1+a_k-1}{a_k+1}} = \sqrt{1+\frac{a_k-1}{a_k+1}}$ $\quad \frac{a_k-1}{a_k+1} > 0$より $a_{k+1} > 1$

∴ $n=k+1$のときも成り立つ

(i), (ii)より $a_n > 1 \ (n=1,2,3,\cdots)$ ▨

(2) (右辺)−(左辺) $= \frac{1}{2}(x-1) - (\sqrt{x}-1)$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2$

$\geqq 0 \quad (\because x>1$より$\sqrt{x}-1 \geqq 0)$

∴ $\sqrt{x}-1 \leqq \frac{1}{2}(x-1)$が成り立つ ▨

(3) (2)において．$x = a_{n+1}^2 \ (>1)$を代入すると．

$a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_{n+1}^2-1)$ $\quad$ ∴ $a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)$

∴ $a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}$ $\quad$ ここで $a_n+1>2$より $\frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{2}$

∴ $a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{4}(a_n-1) \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^2(a_{n-1}-1) \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^n(a_1-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n(\alpha-1)$

∴ $a_n-1 \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$ ▨