三重大学

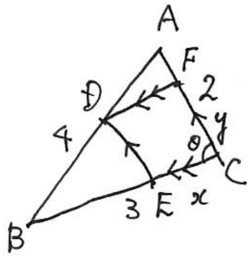
2014年 第2問

$\boxed{2}$ 三角形ABCにおいて AB = 4，BC = 3，CA = 2とする．この三角形の辺AB，BC，CA上に，それぞれ点D，E，Fを，四角形DECFが平行四辺形となるように定める．CE = x，CF = yとおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$の内積を計算せよ．

(2) $\overrightarrow{CD}$を$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$とx，yを用いて表せ．次に，点Dが辺AB上にあることを用いて，yをxの式で表せ．

(3) $x = y$のとき，$\overrightarrow{CD}$を$\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$を用いて表せ．また，$\overrightarrow{CD}$の長さを求めよ．



(1) 余弦定理より．$\angle BCA = \theta$とおくと．

$$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\theta = 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{-\frac{3}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{CE} = \frac{x}{3}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CF} = \frac{y}{2}\overrightarrow{CA}$ より．

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF}$$

$$= \underline{\frac{y}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{x}{3}\overrightarrow{CB}}$$

点Dが辺AB上にあることから

$$\frac{y}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

$$\therefore \underline{y = 2 - \frac{2}{3}x}$$

(3) $x = y$のとき (2)より $x = y = \frac{6}{5}$

$$\therefore \underline{\overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}}$$

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{9}{25}|\overrightarrow{CA}|^2 + \frac{4}{25}|\overrightarrow{CB}|^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{36}{25} + \frac{36}{25} - \frac{18}{25}$$

$$= \frac{54}{25}$$

$$\therefore |\overrightarrow{CD}| = \underline{\frac{3}{5}\sqrt{6}}$$