



2014年理系第5問

5 自然数 n に対して、 $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して、不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。