



2014年第3問

 数理
石井K

3 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ が等式 $AP = PB$ を満たしている。次の問いに答えよ。ただし、 a, b は実数で、 $b \neq -4$ とする。

- (1) 行列 P の逆行列を b を用いて表せ。
 (2) a, b の値を求めよ。
 (3) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

$$(1) \quad P^{-1} = \frac{1}{4+b} \begin{pmatrix} 4 & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$(2) \quad AP = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -b-24 \\ -5 & 8b+52 \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & ab \\ -5 & 4a \end{pmatrix}$$

$$\therefore ab = -b - 24 \quad \dots \textcircled{1} \quad 8b + 52 = 4a \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より. } (a, b) = (7, -3), (5, -4)$$

$$b \neq -4 \text{ より. } \underline{(a, b) = (7, -3)} //$$

$$(3) \quad A = PBP^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots (PBP^{-1})}_{n \text{ 回}}$$

$$= P B^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^n - 3 \cdot 7^n & 3(5^n - 7^n) \\ -4(5^n - 7^n) & -3 \cdot 5^n + 4 \cdot 7^n \end{pmatrix} //$$