

2014年第4問

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ を満たす実数 a, k の値を求めよ。

(2) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$ が $AP = P \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ を満たすとき、実数 p, q, r の値を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、行列 $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の n 個の積 B^n が

$$B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

となることを証明せよ。ただし、 α は 0 と異なる実数とする。

(4) 自然数 n に対して、 A の n 個の積 A^n を求めよ。

(5) 自然数 n に対して、実数 x_n, y_n を $A^n = x_n A + y_n E$ を満たすように定めるとき、 x_n, y_n を n を用いて表せ。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。