0001655454438999

埼玉大学

2014年 理学部 第3問

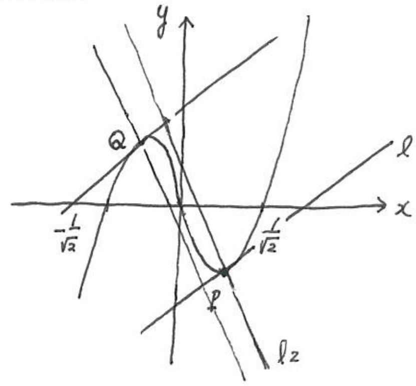
数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ 上に2点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$，$\mathrm{Q}(-t,\ f(-t))$ $(t>0)$ をとり，点Pにおける接線と法線，および，点Qにおける接線と法線によって囲まれる図形を A とする．

(1) 点Pにおける接線を ℓ_1，法線を ℓ_2 とし，原点 $(0,\ 0)$ と ℓ_1，ℓ_2 との距離をそれぞれ d_1，d_2 とおく．d_1，d_2 を t を用いて表せ．

(2) (1)で定めた d_1，d_2 に対し，$d_1=d_2$ となるような t の値をすべて求めよ．

(3) (2)で求めたそれぞれの t の値に対し，図形 A の面積を求めよ．



(1) $f'(x)=3x^2-\frac{1}{2}$ より．

$\ell_1: y=(3t^2-\frac{1}{2})(x-t)+t^3-\frac{1}{2}t$

$=(3t^2-\frac{1}{2})x-2t^3$

∴点と直線のキョリ公式より．$d_1=\dfrac{2t^3}{\sqrt{(3t^2-\frac{1}{2})^2+1^2}}$

$\therefore d_1=\dfrac{4t^3}{\sqrt{36t^4-12t^2+5}}$ //

(3)のメモ．
$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき．$d_1=d_2=\frac{1}{2}$
$t=\frac{\sqrt{30}}{6}$ のとき．$d_1=d_2=\frac{5\sqrt{6}}{18}$

同様に，$\ell_2: y=-\dfrac{1}{3t^2-\frac{1}{2}}(x-t)+t^3-\frac{1}{2}t$

$=-\dfrac{1}{3t^2-\frac{1}{2}}x+\dfrac{t(12t^4-8t^2+5)}{2(6t^2-1)}$

$12(t^2-\frac{1}{3})^2+\frac{11}{3}>0$

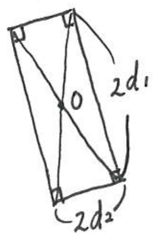
$\therefore d_2=\dfrac{t(12t^4-8t^2+5)}{\sqrt{(\frac{1}{3t^2-\frac{1}{2}})^2+1}\cdot 2(6t^2-1)}=\dfrac{t(12t^4-8t^2+5)}{4\cdot\sqrt{1+(3t^2-\frac{1}{2})^2}}$

$=\dfrac{t(12t^4-8t^2+5)}{2\sqrt{36t^4-12t^2+5}}$ //

(2) $d_1=d_2$ より．$8t^3=12t^5-8t^3+5t$

$\therefore 12t^5-16t^3+5t=0$ $\quad\therefore t(2t^2-1)(6t^2-5)=0$

$t>0$ より．$t=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{30}}{6}$ //



(3) A は長方形であり．面積 S は $S=4d_1d_2=4d_1^2$

∴上のメモより．$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $S=1$，$t=\frac{\sqrt{30}}{6}$ のとき $S=\frac{50}{27}$ //