

2016年教育・経済学部第2問

1枚目/2枚

2  $a, b, c$  および  $d$  は実数で,  $a > 0, b < 0, d \neq 0$  とする. また

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d$$

とおく.  $xyz$  空間内に 3 点  $P_0, P_1, P_2$  があり, 点  $O$  は原点を表す. 点  $P_0(-4, 0, 4\sqrt{3})$  は定点で,  $P_1$  と  $P_2$  はそれぞれ実数  $t$  の値に応じて定まる点  $P_1(-t, f(t), 2\sqrt{3}), P_2(t, g(t), 0)$  である. この 3 点  $P_0, P_1, P_2$  が次の 3 条件をみたしているとき, 定数  $a, b, c, d$  の値をすべて求めなさい.

(i)  $t = 0$  のとき, ベクトル  $\overrightarrow{OP_1}$  と  $\overrightarrow{OP_2}$  のなす角は  $\frac{\pi}{3}$  である.

(ii) ベクトル  $\overrightarrow{OP_1}$  の長さの最小値は  $\sqrt{14}$  である.

(iii) 点  $O, P_0, P_1, P_2$  は,  $t = 1$  および  $t = -3$  のとき, それぞれ同一平面上にある.

(i)

$$f(0) = b, \quad g(0) = d \text{ より.}$$

$$t=0 \text{ のとき}, \quad \overrightarrow{OP_1} = (0, b, 2\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{OP_2} = (0, d, 0)$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{b^2+12}, \quad |\overrightarrow{OP_2}| = |d|, \quad \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = bd$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_1}| |\overrightarrow{OP_2}|} \quad \text{に代入して}, \quad \frac{1}{2} = \frac{bd}{\sqrt{b^2+12} \cdot |d|}$$

(左辺)  $> 0$  より,  $d < 0 \cdots \text{①} \text{ が分かる}$

両辺 2乗して 整理すると,  $b^2 = 4$

$$b < 0 \text{ より } b = -2$$

$$(ii) \quad \overrightarrow{OP_1} = (-t, at+b, 2\sqrt{3}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP_1}| &= \sqrt{t^2 + (at+b)^2 + 12} \\ &= \sqrt{(a^2+1)t^2 + 2abt + b^2 + 12} \end{aligned}$$

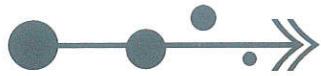
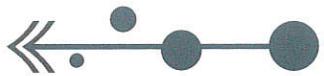
(i) より  $b = -2$  なので,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP_1}| &= \sqrt{(a^2+1)t^2 - 4at + 16} \\ &= \sqrt{(a^2+1)\left(t - \frac{2a}{a^2+1}\right)^2 - \frac{4a^2}{a^2+1} + 16} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP_1}| \text{ の最小値は } \sqrt{\frac{-4a^2}{a^2+1} + 16} = \sqrt{14} \quad \therefore a^2 = 1$$

$$a > 0 \text{ より } a = 1$$

2枚目へ戻る



2016年教育・経済学部第2問

2枚目/2枚

- 2  $a, b, c$  および  $d$  は実数で,  $a > 0, b < 0, d \neq 0$  とする. また

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d$$

とおく.  $xyz$  空間内に 3 点  $P_0, P_1, P_2$  があり, 点  $O$  は原点を表す. 点  $P_0(-4, 0, 4\sqrt{3})$  は定点で,  $P_1$  と  $P_2$  はそれぞれ実数  $t$  の値に応じて定まる点  $P_1(-t, f(t), 2\sqrt{3}), P_2(t, g(t), 0)$  である. この 3 点  $P_0, P_1, P_2$  が次の 3 条件をみたしているとき, 定数  $a, b, c, d$  の値をすべて求めなさい.

- (i)  $t = 0$  のとき, ベクトル  $\overrightarrow{OP_1}$  と  $\overrightarrow{OP_2}$  のなす角は  $\frac{\pi}{3}$  である.
- (ii) ベクトル  $\overrightarrow{OP_1}$  の長さの最小値は  $\sqrt{14}$  である.
- (iii) 点  $O, P_0, P_1, P_2$  は,  $t = 1$  および  $t = -3$  のとき, それぞれ同一平面上にある.
- (iii) (i), (ii) より

$$\overrightarrow{OP_1} = (-t, t-2, 2\sqrt{3})$$

点  $O, P_0, P_1, P_2$  が同一平面上にあるとき

$$\overrightarrow{OP_2} = p \overrightarrow{OP_0} + q \overrightarrow{OP_1} \quad (p, q \text{ は実数}) \text{ を表せるから}$$

$t = 1$  を代入して

$$(1, 1+c+d, 0) = p(-4, 0, 4\sqrt{3}) + q(-1, -1, 2\sqrt{3})$$

$$\begin{cases} 1 = -4p - q \cdots ② \\ 1+c+d = -q \cdots ③ \\ 0 = 4\sqrt{3}p + 2\sqrt{3}q \cdots ④ \end{cases}$$

$$\text{②} \sim \text{④} \text{ より } p = -\frac{1}{2}, q = 1, c+d = -2 \cdots ⑤$$

$t = -3$  を代入して

$$(-3, q-3c+d, 0) = p(-4, 0, 4\sqrt{3}) + q(3, -5, 2\sqrt{3})$$

$$\begin{cases} -3 = -4p + 3q \cdots ⑥ \\ q-3c+d = -5q \cdots ⑦ \\ 0 = 4\sqrt{3}p + 2\sqrt{3}q \cdots ⑧ \end{cases}$$

$$\text{⑥} \sim \text{⑧} \text{ より, } p = \frac{3}{10}, q = -\frac{3}{5}, -3c+d = -6 \cdots ⑨$$

$$\text{⑤, ⑨ より } c = 1, d = -3$$

以上より,  $a = 1, b = -2, c = 1, d = -3$ ,