



2018年理学部第1問

1 整式 $f_n(x)$, および実数 a_n, b_n は

$$(x+1)^n = (x^2+1)f_n(x) + a_nx + b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。ただし、定数も整式とみなす。次の問いに答えよ。

(1) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ をそれぞれ求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

$$(3) \begin{cases} a_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \\ b_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(1)}{2^n}$ を求めよ。