埼玉大学

2016年 教育・経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a, b, p, q, r は実数とする．3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の3つの解が

$$(2a+1)^2+(a-b)i,\ (2a+1)^2+(a^2+b+1)i,\ (2a+1)^2+(a^2+b-1)i$$

であるとき，p, q, r の値を求めなさい．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．

解と係数の関係より

$$(2a+1)^2+(a-b)i+(2a+1)^2+(a^2+b+1)i+(2a+1)^2+(a^2+b-1)i=-p$$

右辺は実数であるから，

$$a-b+a^2+b+1+a^2+b-1=0$$

$$\therefore b=-2a^2-a$$

このとき，3つの解は

$$(2a+1)^2+(2a^2+2a)i,\ (2a+1)^2+(-a^2-a+1)i,\ (2a+1)^2+(-a^2-a-1)i$$

このうち少なくとも1つは実数解である

(i) $(2a+1)^2+(2a^2+2a)i$ が実数のとき

$2a(a+1)=0 \quad \therefore a=-1, 0$

① $a=-1$ のとき　3つの解は．$1,\ 1+i,\ 1-i$ となり条件をみたす

② $a=0$ のとき　〃　$1,\ 1+i,\ 1-i$　〃

(ii) $(2a+1)^2+(-a^2-a+1)i$ が実数のとき

$a^2+a-1=0 \quad \therefore a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

このとき 3つの解は．$5+2i,\ 5,\ 5-2i$ となり条件をみたす

(i), (ii) と $-a^2-a-1=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$ より

$$\begin{cases}-p=1+1+i+1-i=3\\ q=1+i+1-i+(1+i)(1-i)=4\\ -r=1\cdot(1+i)(1-i)=2\end{cases}$$

または

$$\begin{cases}-p=5+2i+5+5-2i=15\\ q=5(5+2i+5-2i)+(5+2i)(5-2i)=79\\ -r=5(5+2i)(5-2i)=145\end{cases}$$

$\therefore$ $\underline{(p, q, r)=(-3, 4, -2), (-15, 79, -145)}$ //