



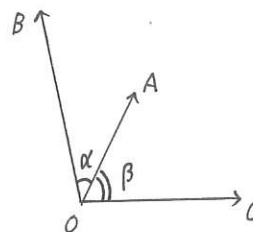
2016年 経済学部 第3問

3 平面上の点 O, A, B, C に対して, \vec{OA} と \vec{OB} のなす角を α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とし, \vec{OA} と \vec{OC} のなす角を β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) とする. さらに,

$$\angle BOC = \alpha + \beta, \quad |\vec{OB}| = 2|\vec{OA}| = 4\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 1$$

であるとする. $\triangle OAB, \triangle OAC, \triangle OBC$ の面積をそれぞれ s, t, u とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) s, t, u を, それぞれ α, β を用いて表せ.
 (2) $2s = 2t = u$ であるとき, α と β を求めよ.



$$\begin{aligned} (1) \quad s &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{4} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OC}| \sin \beta$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{4}, \quad |\vec{OA}| = \frac{1}{2} \text{ より } \frac{1}{2} |\vec{OC}| \cos \beta = \frac{1}{4} \quad \therefore |\vec{OC}| = \frac{1}{2 \cos \beta}$$

$$\begin{aligned} \therefore t &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cos \beta} \cdot \sin \beta \\ &= \frac{1}{8} \tan \beta \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{2} |\vec{OB}| |\vec{OC}| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2 \cos \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta}$$

$$s = \frac{1}{4} \sin \alpha, \quad t = \frac{1}{8} \tan \beta, \quad u = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta} //$$

$$(2) \quad 2s = 2t = u \iff \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{4} \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \tan \beta \text{ より } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin \beta$$

$$\therefore \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{4 \cos \beta} = \frac{\sin \beta (\frac{1}{2} + \cos \alpha)}{4 \cos \beta} = \frac{1}{4} \tan \beta \cdot (\frac{1}{2} + \cos \alpha)$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \cos \alpha = 1 \quad \text{より} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \beta = 2 \sin \alpha = \sqrt{3} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \beta = \frac{\pi}{3} \quad \text{よって } \alpha = \beta = \frac{\pi}{3} //$$