埼玉大学

2010年第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

2　aを実数とする．3つの放物線$y=4x^2$, $y=2x^2+2$, $y=(x-a)^2$のうち少なくとも2つの上にある点の個数をmとする．

(1) $a=1$のときmの値を求めよ．
(2) $a=3$のときmの値を求めよ．
(3) $1<a<3$のときmの値を求めよ．

(1) $C_1 : y=4x^2$, $C_2 : y=2x^2+2$, $C_3 : y=(x-a)^2$ とする.

C_1とC_2の交点のx座標を求めると.

$4x^2-2x^2-2=0 \quad \therefore x=\pm 1 \quad \cdots①$

C_1とC_3の交点のx座標を求めると.

$(2x)^2-(x-a)^2=0 \quad \therefore (3x-a)(x+a)=0 \quad \therefore x=\frac{a}{3}, -a \quad \cdots②$

C_2とC_3の交点のx座標を求めると.

$2x^2+2-(x-a)^2=0 \quad \therefore x^2+2ax+2-a^2=0 \quad \therefore x=-a\pm\sqrt{2a^2-2} \quad \cdots③$

$a=1$のとき. ①〜③より交点のx座標は. $x=1, -1, \frac{1}{3}$

$\therefore \underline{m=3}$ //

(2) 同様に①〜③に$a=3$を代入すると, $x=1, -1, -3, -7$

$\therefore \underline{m=4}$ //

(3) $1<a<3$のとき. ①〜③の大小関係は.

$-a-\sqrt{2a^2-2} < -a < -1 < \frac{a}{3} < 1$ であり.

$$\begin{aligned}
-a+\sqrt{2a^2-2}-(-1) &= \sqrt{2(a+1)(a-1)}-(a-1) \\
&= \sqrt{a-1}\left(\sqrt{2(a+1)}-\sqrt{a-1}\right) \\
&= \sqrt{a-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{2(a+1)}-\sqrt{a-1}\right)\left(\sqrt{2(a+1)}+\sqrt{a-1}\right)}{\sqrt{2(a+1)}+\sqrt{a-1}} \\
&= \sqrt{a-1}\cdot\frac{a+3}{\sqrt{2(a+1)}+\sqrt{a-1}} \\
&> 0
\end{aligned}$$

2枚目につづく

2010年第2問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ aを実数とする．3つの放物線 $y=4x^2$，$y=2x^2+2$，$y=(x-a)^2$ のうち少なくとも2つの上にある点の個数を m とする．

(1) $a=1$ のとき m の値を求めよ．

(2) $a=3$ のとき m の値を求めよ．

(3) $1<a<3$ のとき m の値を求めよ．

(3) のつづき．

$\therefore\ -1<-a+\sqrt{2a^2-2}$

また，$\frac{a}{3}-\left(-a+\sqrt{2a^2-2}\right)=\frac{4}{3}a-\sqrt{2a^2-2}$ であり．

$\frac{4}{3}a>0$，$\sqrt{2a^2-2}>0$ より 2乗して大小を比較すると．

$$\left(\frac{4}{3}a\right)^2-(2a^2-2)=2-\frac{2}{9}a^2$$

$$=\frac{2(3+a)(3-a)}{9}$$

$$>0\quad(\because\ 1<a<3\text{ より})$$

$\therefore\ \frac{a}{3}-\left(-a+\sqrt{2a^2-2}\right)>0$

すなわち，$-a+\sqrt{2a^2-2}<\frac{a}{3}$

$\therefore\ -1<-a+\sqrt{2a^2-2}<\frac{a}{3}$

ここまで示さなくても

$-a+\sqrt{2a^2-2}\neq -1,\ \frac{a}{3},\ 1$

がいえていればよい

となり①〜③の x の値はすべて異なるので

$\underline{m=6}$ //