東京農工大学

2016年第1問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ Oを原点とする座標空間に4点A(1, −2, −2), B(−1, −4, 0), C(2, 2, −4), D(2, 4, −4)をとる．また，線分ABを$t:(1+t)$に外分する点をP，線分OBを3：2に外分する点をQとおく．ただし，tは正の実数とする．次の問いに答えよ．

(1) ベクトル$\overrightarrow{OP}$の成分をtを用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CP}$が垂直であるとき，tの値を求めよ．

(3) 実数r, sについて$\overrightarrow{DP}=r\overrightarrow{DC}+s\overrightarrow{DQ}$が成り立つとする．このとき，$r$, s, tの値を求めよ．

(4) tが(3)で求めた値のとき，直線DPと直線CQの交点の座標を求めよ．

(5) △CDPの面積を$S(t)$とする．$S(t)$の最小値を求めよ．また，そのときのtの値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{(1+t)\overrightarrow{OA}+(-t)\overrightarrow{OB}}{-t+1+t}$

$=(1+t)\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB}$

$=\underline{(2t+1,\ 2t-2,\ -2t-2)}$ //

(2) $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$, $\overrightarrow{CP}=(2t-1,\ 2t-4,\ -2t+2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=-2(2t-1)-2(2t-4)+2(-2t+2)$

$=-12t+14$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CP}$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ であるから，$-12t+14=0$　∴ $\underline{t=\frac{7}{6}}$ //

(3) $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=(2t-1,\ 2t-6,\ -2t+2)$

$\overrightarrow{DC}=(0,-2,0)$

$\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OB}=(-3,-12,0)$

∴ $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OD}=(-5,-16,4)$

∴ $\overrightarrow{DP}=r\overrightarrow{DC}+s\overrightarrow{DQ} \iff (2t-1,\ 2t-6,\ -2t+2)=(-5s,\ -2r-16s,\ 4s)$

各成分を比べて，

$$\begin{cases} 2t-1=-5s & \cdots① \\ 2t-6=-2r-16s & \cdots② \\ -2t+2=4s & \cdots③ \end{cases}$$

①+③より，$1=-s$　∴ $s=-1$

①に代入して，$t=3$

②より，$r=8$

以上より，$\underline{r=8,\ s=-1,\ t=3}$ //

0002226633777999

東京農工大学

2016年第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

1 Oを原点とする座標空間に4点 A(1, −2, −2), B(−1, −4, 0), C(2, 2, −4), D(2, 4, −4) をとる．また，線分 AB を $t:(1+t)$ に外分する点を P，線分 OB を 3 : 2 に外分する点を Q とおく．ただし，t は正の実数とする．次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が垂直であるとき，t の値を求めよ．

(3) 実数 r, s について $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=r\overrightarrow{\mathrm{DC}}+s\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ が成り立つとする．このとき，r, s, t の値を求めよ．

(4) t が (3) で求めた値のとき，直線 DP と直線 CQ の交点の座標を求めよ．

(5) △CDP の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の最小値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

(4) 交点をR，点Eを $\overrightarrow{DE}=8\overrightarrow{DC}$ となる点，

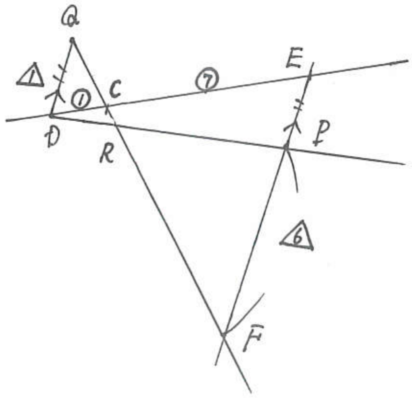
CQとEPの交点をFとする．

$\triangle CQD$ と $\triangle CFE$ は相似で相似比は 1:7

$\therefore |\overrightarrow{DQ}|:|\overrightarrow{EF}|=1:7$

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{PE}$ より．$|\overrightarrow{DQ}|:|\overrightarrow{PF}|=1:6$

$\therefore \overrightarrow{DR}=\frac{1}{7}\overrightarrow{DP}$



$\overrightarrow{DP}=(5, 0, -4)$ （∵(3)より）なので $\overrightarrow{DR}=\left(\frac{5}{7}, 0, -\frac{4}{7}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{DR}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DR}$　　$\therefore \overrightarrow{OR}=\left(\frac{19}{7}, 4, -\frac{32}{7}\right)$

$\therefore R\left(\frac{19}{7}, 4, -\frac{32}{7}\right)$ //

(5) $\overrightarrow{CD}=(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{CP}=(2t-1, 2t-4, -2t+2)$

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CP}=4t-8$

$$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CD}|^2|\overrightarrow{CP}|^2-(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4\left\{(2t-1)^2+(2t-4)^2+(-2t+2)^2\right\}-(4t-8)^2}$$

$$=\sqrt{8t^2-12t+5}$$

$$=\sqrt{8\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ 最小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ （$t=\frac{3}{4}$ のとき） //