琉球大学

2014年 理系 第3問

3 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第1次導関数 y' と第2次導関数 y'' を求めよ．

(2) 座標平面上の3点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$，$\mathrm{B}(m+1,\ \log m)$，$\mathrm{C}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする．S_m を m を用いて表せ．

(3) $f(m) = \log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx$ とおく．$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ．

(4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$$

を証明せよ．

(5) 不等式 $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．