2014年 医学部 第5問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ 座標平面上の曲線 C は媒介変数 t ($t \geqq 0$) を用いて $x = t^2 + 2t + \log(t+1)$，$y = t^2 + 2t - \log(t+1)$ と表される．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における C の接線の傾きが $\dfrac{2e-1}{2e+1}$ であるとする．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a と b の値を求めよ．

(2) Q を座標 $(b,\ a)$ の点とする．直線 PQ，直線 $y = x$ と曲線 C で囲まれた図形を，直線 $y = x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2 + \dfrac{1}{t+1}$，$\dfrac{dy}{dt} = 2t + 2 - \dfrac{1}{t+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+2-\frac{1}{t+1}}{2t+2+\frac{1}{t+1}} = \frac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1}$$

分子・分母に $(t+1)$ をかけた．

よって．$\dfrac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1} = \dfrac{2e-1}{2e+1}$ より．$2(t+1)^2(2e+1) - 2e - 1 = 2(t+1)^2(2e-1) + 2e - 1$

$$\therefore 2(t+1)^2\{2e+1-(2e-1)\} = 4e$$

$\therefore (t+1)^2 = e$　　$t \geqq 0$ であるから．$t = \sqrt{e} - 1$

このとき．$x = (\sqrt{e}-1)^2 + 2(\sqrt{e}-1) + \log\sqrt{e} = e - \frac{1}{2}$

$y = (\sqrt{e}-1)^2 + 2(\sqrt{e}-1) - \log\sqrt{e} = e - \frac{3}{2}$

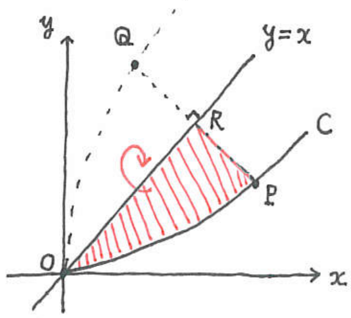
$\therefore \mathrm{P}\left(e-\frac{1}{2},\ e-\frac{3}{2}\right)$ となり．$\underline{a = e - \frac{1}{2},\ b = e - \frac{3}{2}}$ //

(2) $t \geqq 0$ のとき．$\log(t+1) \geqq 0$ より．$x \geqq 0$ となる．

また．$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1} = 1 - \dfrac{2}{2(t+1)^2+1} < 1$ であるから $0 \leqq \dfrac{dy}{dx} < 1$ となり．

曲線 C は $y = x$ より下側に存在する．

∴ グラフは右のようになる．



$y = x$ と PQ の交点を R とおくと．R は線分 PQ の中点になるから．$\mathrm{R}(e-1,\ e-1)$ である．

点 S が線分 OR を動くとし，$\mathrm{OS} = s$ ($0 \leqq s \leqq \sqrt{2}(e-1)$) とおく．

0001847812518999

群馬大学

2014年 医学部 第5問

2枚目／2枚

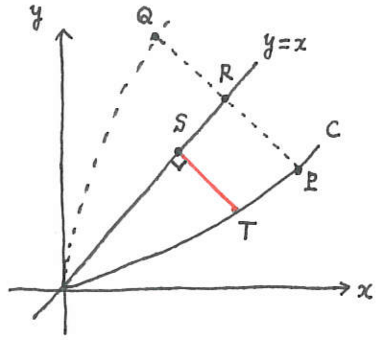
数理 石井K

$\boxed{5}$ 座標平面上の曲線 C は媒介変数 t $(t \geqq 0)$ を用いて $x = t^2 + 2t + \log(t+1)$, $y = t^2 + 2t - \log(t+1)$ と表される．C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における C の接線の傾きが $\dfrac{2e-1}{2e+1}$ であるとする．ただし，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a と b の値を求めよ．

(2) Q を座標 $(b,\ a)$ の点とする．直線 PQ，直線 $y = x$ と曲線 C で囲まれた図形を，直線 $y = x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) のつづき．



$S\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$ であるから S を通り $y=x$ に垂直な直線は．

$l : y = -\left(x - \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{s}{\sqrt{2}}$

よって，$l : y = -x + \sqrt{2}s$

l と C の交点を求めると．$t^2+2t-\log(t+1) = -t^2-2t-\log(t+1)+\sqrt{2}s$

よって．$t^2+2t = \dfrac{s}{\sqrt{2}}$ $\cdots$ ①　両辺 1 を加えて．$(t+1)^2 = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1$

$t+1>0$ より．$t+1 = \sqrt{\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1}$ $\cdots$ ②

①，② より．$x = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)$，$y = \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)$

この点を T とおくと．$ST^2 = \left\{\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}^2 \cdot 2 = \dfrac{1}{2}\left\{\log\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}^2$

$$\therefore V = \pi\int_0^{\sqrt{2}(e-1)} ST^2\, ds$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}(e-1)} \frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}^2 ds$$

$x = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 1$ とおくと．$dx = \dfrac{1}{\sqrt{2}}ds$，$\begin{array}{c|c} s & 0 \to \sqrt{2}(e-1) \\ \hline x & 1 \to e \end{array}$

$$\therefore V = \pi\int_1^e \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\log x)^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_1^e (x)'(\log x)^2\, dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_1^e 2\log x\, dx$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e - \sqrt{2}\pi\int_1^e (x)'\log x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}e - \sqrt{2}\pi\Big[x\log x\Big]_1^e + \sqrt{2}\pi\int_1^e dx$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(e-2)\pi}$$ //