2014年 第2問

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2つの実数 a，b がともに2より大きいための必要十分条件は，$ab-2(a+b)+4>0$ かつ $a+b>4$ であることを示せ．

(2) 定数 k に対して，方程式

$$(\log_2 x)^2-(k+2)\log_2 x-k+17=0$$

を考える．

(i) 方程式が実数解 α，β をもつとき，$\log_2(\alpha\beta)$ と $(\log_2\alpha)(\log_2\beta)$ を k を用いて表せ．

(ii) 方程式が4より大きい異なる2つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．

(1) $a>2$ かつ $b>2$ $\iff$ $a-2>0$ かつ $b-2>0$

$\iff$ $a-2+b-2>0$ かつ $(a-2)(b-2)>0$

$\iff$ $a+b>4$ かつ $ab-2(a+b)+4>0$ ■

(2) (i) $X=\log_2 x$ とおくと．$X^2-(k+2)X-k+17=0$ $\cdots$ (*)

このときの解は．$X=\log_2\alpha$，$\log_2\beta$

(*) に対して．解と係数の関係より．$\log_2\alpha+\log_2\beta=\underline{\log_2\alpha\beta=k+2}$ //

$\underline{(\log_2\alpha)\cdot(\log_2\beta)=-k+17}$ //

(ii) α，β が4より大きく異なる実数

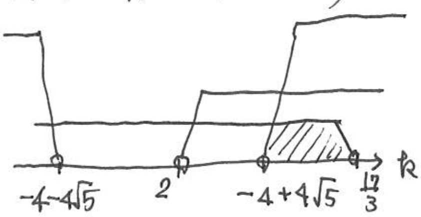
$\iff$ $\log_2\alpha>4$ かつ $\log_2\beta>4$ かつ (*)の判別式 $D>0$

(1)より $\iff$ $(\log_2\alpha)\cdot(\log_2\beta)-2(\log_2\alpha+\log_2\beta)+4>0$ かつ $\log_2\alpha+\log_2\beta>4$ かつ

$D=(k+2)^2-4(-k+17)>0$

(i)より $\iff$ $-k+17-2(k+2)+4>0$ かつ $k+2>4$ かつ $k^2+8k-64>0$

$\iff$ $k<\frac{17}{3}$ かつ $k>2$ かつ $(k>-4+4\sqrt{5}$ または $k<-4-4\sqrt{5})$



$\therefore\ \underline{-4+4\sqrt{5}<k<\frac{17}{3}}$ //