



2012年教育(文系)第1問

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問に答えよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{8a_n - 1}{25a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。(2) (1)の結果に基づいて、一般項 a_n を推測せよ。また、その推測が正しいことを証明せよ。

$$(1) a_2 = \frac{8 \cdot \frac{1}{2} - 1}{25 \cdot \frac{1}{2} - 2} = \frac{4 - 1}{\frac{25}{2} - 2} = \frac{2}{7}, \quad a_3 = \frac{8 \cdot \frac{2}{7} - 1}{25 \cdot \frac{2}{7} - 2} = \frac{1}{4},$$

$$a_4 = \frac{8 \cdot \frac{1}{4} - 1}{25 \cdot \frac{1}{4} - 2} = \frac{4}{17}, \quad a_5 = \frac{8 \cdot \frac{4}{17} - 1}{25 \cdot \frac{4}{17} - 2} = \frac{5}{22}$$

$$\text{以上より, } a_2 = \frac{2}{7}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{4}{17}, a_5 = \frac{5}{22} \quad \text{〃}$$

(2) (1)の $a_3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ であることに注意すると。 a_n の分母は、初項 2、公差 5 の等差数列、分子は n になっている。

$$\therefore a_n = \frac{n}{5n-3} \quad (n=1, 2, \dots) \text{ と推測できる.}$$

これを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、 $a_1 = \frac{1}{2}$ となり成り立つ(ii) $n=k$ のとき成り立つとすると、 $a_k = \frac{k}{5k-3}$

$$\therefore a_{k+1} = \frac{8 \cdot \frac{k}{5k-3} - 1}{25 \cdot \frac{k}{5k-3} - 2}$$

$$= \frac{8k - (5k-3)}{25k - 2(5k-3)}$$

$$= \frac{3k+3}{15k+6}$$

$$= \frac{k+1}{5(k+1)-3} \quad \text{となり, } n=k+1 \text{ のときも成り立っている.}$$

(i),(ii)より、すべての自然数 n について、 $a_n = \frac{n}{5n-3}$ が成り立つ \square