

2016年薬学部第3問

 数理
石井K

3 食塩水が100gある。これから20gを取って捨てた後に濃度が10%の食塩水を20g加える。食塩水の初めの濃度を20%として、この操作を n 回($n=1, 2, 3, \dots$)繰り返した後の食塩水に含まれる食塩の量を x_n gとする。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1) x_1 は $\frac{18}{}$ アイ である。

(2) $x_{n+1} = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \frac{4}{5} x_n + \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ が成り立つ。この式を $x_{n+1} - p = q(x_n - p)$ とおくと、定数 p, q の値は

$$p = \frac{\text{カキ}}{10}, \quad q = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \frac{4}{5}$$

となる。これより

$$x_n = \frac{\text{コサ}}{10} + \frac{\text{シス}}{10} \left(\frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \frac{4}{5} \right)^n$$

が得られる。

(3) 食塩水の濃度を11%以下にするには、この操作を少なくとも $\frac{11}{}$ タチ 回繰り返す必要がある。

$$(1) x_1 = \frac{20}{100} \times 80 + \frac{10}{100} \times 20 = \frac{18}{}$$

$$(2) x_{n+1} = \frac{4}{5} x_n + 2$$

$$x_{n+1} - 10 = \frac{4}{5} (x_n - 10) \quad \therefore p = 10, q = \frac{4}{5}$$

\therefore 数列 $\{x_n - 10\}$ は 初項 $x_1 - 10 = 8$, 公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列

$$\therefore x_n - 10 = 8 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \quad \therefore x_n - 10 = 10 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore x_n = 10 \left\{ 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

(3) $x_n \leq 11$ より

$$10 + 10 \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 11$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{10}$$

$$n \log_{10} \frac{4}{5} \leq -1$$

$$n (3 \log_{10} 2 - 1) \leq -1$$

$$n \geq \frac{1}{1 - 3 \log_{10} 2} = 10.3 \dots$$

よって 少なくとも $\frac{11}{}$ 回