



2013年 経済学部 第3問



3 以下の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。
 (2) p を 0 でない有理数, q を有理数とするとき, $p\sqrt{5} + q$ が無理数であることを証明せよ。

(1) 背理法で示す

 $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると,

$$\sqrt{5} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数}) \text{ と表せる}$$

両辺 2 乗して整理すると, $5p^2 = q^2 \cdots (*)$ 左辺は 5 の倍数より, q^2 は 5 の倍数 $\therefore q$ も 5 の倍数 $q = 5q'$ とおいて (*) に代入すると,

$$5p^2 = 25q'^2 \quad \therefore p^2 = 5q'^2$$

右辺は 5 の倍数より, p^2 は 5 の倍数 $\therefore p$ も 5 の倍数となるよって, p も q も 5 の倍数となるが, これは p と q が互いに素であることに矛盾する $\therefore \sqrt{5}$ は無理数である \square

(2) 背理法で示す

 $p\sqrt{5} + q = r$ (r :有理数) と仮定すると,

$$\sqrt{5} = \frac{r-q}{p}$$

右辺は, 有理数と有理数の差を有理数で割ったものなので有理数である

よって $\sqrt{5}$ は有理数となるが, これは (1) に矛盾する。よって, $p\sqrt{5} + q$ は無理数である \square