0002247272577999

徳島大学

2016年 医（保健）・工学部 第3問

1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ △OABの頂点をO(0, 0)，A(1, 0)，B(a, b)とする．辺OAを$p:(1-p)$に内分する点をP，辺ABを$q:(1-q)$に内分する点をQ，辺BOを$r:(1-r)$に内分する点をRとする．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$とする．△OABの面積をS_1，△PQRの面積をS_2として，次の問いに答えよ．

(1) △OABの重心と△PQRの重心が一致するとき，$p:q:r$を求めよ．

(2) 3点(0, 0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)を頂点とする三角形の面積は，$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$で表されることを示せ．

(3) $\frac{S_2}{S_1}$をp，q，rを用いて表せ．

(4) △OABの重心と△PQRの重心が一致するとき，$\frac{S_2}{S_1}$の最小値を求めよ．

(1) △OABの重心は $\left(\frac{0+1+a}{3}, \frac{0+0+b}{3}\right)=\left(\frac{a+1}{3}, \frac{b}{3}\right)$ …①

P$(p, 0)$，Q$(1-q+qa, qb)$，R$((1-r)a, (1-r)b)$

∴ △PQRの重心は $\left(\frac{p+1-q+qa+(1-r)a}{3}, \frac{qb+(1-r)b}{3}\right)$ …②

①，②の各成分を比べて，$a+1=p+1-q+qa+(1-r)a$ かつ $b=qb+(1-r)b$ …(*)

3点O，A，Bが三角形をなすことより，$b\neq0$

よって，(*) $\iff$ $p-q+qa-ra=0$ かつ $b(q-r)=0$

$\iff$ $p-q+qa-ra=0$ かつ $q=r$

$\iff$ $p=q=r$

以上より，$\underline{p:q:r=1:1:1}$ //

(2) O(0,0)，C(x_1, y_1)，D(x_2, y_2)とすると，点Dと直線OCのキョリdは

$y_1x-x_1y=0$

$$d=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$\therefore \triangle OCD=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1| \quad ■$$

2枚目へつづく

2016年 医（保健）・工学部 第3問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ △OABの頂点を O(0, 0)，A(1, 0)，B(a, b) とする．辺OAを $p:(1-p)$ に内分する点を P，辺ABを $q:(1-q)$ に内分する点を Q，辺BOを $r:(1-r)$ に内分する点を R とする．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ とする．△OABの面積を S_1，△PQRの面積を S_2 として，次の問いに答えよ．

(1) △OABの重心と△PQRの重心が一致するとき，$p:q:r$ を求めよ．

(2) 3点 (0, 0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) を頂点とする三角形の面積は，$\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ で表されることを示せ．

(3) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を p，q，r を用いて表せ．

(4) △OABの重心と△PQRの重心が一致するとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の最小値を求めよ．

(3) (2)より $S_1=\frac{1}{2}|b-0|=\frac{1}{2}|b|$

$P\to P'(0,0)$，$Q\to Q'(1-q+qa-p,\ qb)$，$R\to R'((1-r)a-p,\ (1-r)b)$

と x 軸方向に $-p$ だけ平行移動しても S_2 の値は変わらないので

(2)より，$S_2=\frac{1}{2}\left|(1-q+qa-p)(1-r)b-qb\{(1-r)a-p\}\right|$

$=\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|1-p-q-r+pq+qr+pr|$

絶対値の内身は正なので

よって，$\dfrac{S_2}{S_1}=|1-p-q-r+pq+qr+pr|=|\underbrace{(1-p)}_{>0}\underbrace{(1-q)}_{>0}\underbrace{(1-r)}_{>0}+\underbrace{pqr}_{>0}|=\underline{(1-p)(1-q)(1-r)+pqr}$ //

(4) (1)より，$p=q=r=x$ $(0<x<1)$ とおけるから

$\dfrac{S_2}{S_1}=3x^2-3x+1$

$=3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

よって，$0<x<1$ より．$\underline{最小値は \frac{1}{4} (p=q=r=\frac{1}{2}のとき)}$ //