0002160909387999

西南学院大学

2015年 商・国際文化 第3問

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ.

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ の大小関係について，以下の1〜6の選択肢のうち，$\boxed{\text{ツ}}$ が成立する. 5

1 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{6}$

2 $\sqrt{2} < \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$

3 $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{6}$

4 $\sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{6} < \sqrt{2}$

5 $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

6 $\sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ はすべて正であるから，それぞれ6乗すると.

$(\sqrt{2})^6 = 8$, $(\sqrt[3]{3})^6 = 9$, $(\sqrt[6]{6})^6 = 6$

$\therefore (\sqrt[6]{6})^6 < (\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6$

$\therefore \sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ $\quad\therefore \underline{5}$ //

(2) $a > b > 1$ のとき，$\log_a b - \log_b a = -\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ ならば，$\log_a b + \log_b a = \dfrac{\boxed{\text{テ}}\ 8}{\boxed{\text{ト}}\ 3}$ である.

(3) $y = \log_8(1+x^2) - \dfrac{1}{3}\log_2 x$ は $x = \boxed{\text{ナ}}$ 1 のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}\ 1}{\boxed{\text{ヌ}}\ 3}$ をとる.

(2) 底の変換公式より.

$$\log_a b - \frac{\log_a a}{\log_a b} = -\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore (\log_a b)^2 + \frac{2\sqrt{7}}{3}\log_a b - 1 = 0$$

$$\therefore \log_a b = \frac{-\frac{2\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{\frac{28}{9}+4}}{2}$$

$a > b > 1$ より $\log_a b > 0$ なので

$$\log_a b = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \qquad \therefore \log_a b + \log_b a = \frac{4-\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{4-\sqrt{7}} = \frac{8}{3} \text{ //}$$

有理化して計算する.

(3) 真数条件より $x > 0$

$$y = \frac{\log_2(1+x^2)}{\log_2 8} - \frac{1}{3}\log_2 x$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\log_2(1+x^2) - \log_2 x\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\log_2 \frac{1+x^2}{x}$$

$$= \frac{1}{3}\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ より.

相加・相乗平均の関係から.

$x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ (等号成立は $x=1$)

$\therefore y \geqq \frac{1}{3}\log_2 2$

$\therefore$ $\underline{x=1 \text{ のとき. 最小値 } \frac{1}{3}}$ //