愛知教育大学

2015年 第3問

$\boxed{3}$ xy 平面上の曲線 $C_1 : y = x^2$ を考える．C_1 上に異なる2点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$ をとり，点Aにおける C_1 の接線と点Bにおける C_1 の接線の交点をPとする．ただし，$a < b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点Pの座標を a，b を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を a，b を用いて表せ．

(3) (1)で求めた点Pが，xy 平面上の曲線 $C_2 : y = x^2 - x\ (0 < x < 1)$ 上にあるとする．このとき，(1)で求めた点Pの x 座標を s とおき，(2)で求めた内積を s で表せ．

(4) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を最大にする C_2 上の点Pの座標を求めよ．

* (2)〜(4)については，必答範囲外からの出題のため，技術・情報科学の受験者全員に対し，正解とする．

(1) $y' = 2x$ より．点Aにおける接線は．$y = 2a(x-a) + a^2$ $\quad\therefore y = 2ax - a^2 \cdots$ ①

同様にして．点Bにおける接線は．$y = 2bx - b^2 \cdots$ ②

① − ② より，$(a-b)\{2x - (a+b)\} = 0$

$a < b$ より，$x = \dfrac{a+b}{2}$ これを①に代入して．$y = ab$ $\quad\therefore \underline{P\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)}$ //

(2) $\overrightarrow{PA} = \left(\dfrac{a-b}{2},\ a^2 - ab\right)$，$\overrightarrow{PB} = \left(\dfrac{b-a}{2},\ b^2 - ab\right)$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{b-a}{2} + (a^2 - ab)(b^2 - ab)$$

$$= \underline{-\left(ab + \frac{1}{4}\right)(a-b)^2} \ //$$

(3) 点Pが C_2 上にあるとき．$ab = s^2 - s$，$s = \dfrac{a+b}{2}$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\left(ab + \frac{1}{4}\right)\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot 4 - 4ab\right\}$$

$$= -\left(s^2 - s + \frac{1}{4}\right) \cdot 4s$$

$$= \underline{-(2s-1)^2 s} \ //$$

(4) $f(s) = -(2s-1)^2 s$ とおく $(0 < s < 1)$

$f(s) = -4s^3 + 4s^2 - s$

$\therefore f'(s) = -12s^2 + 8s - 1$

$= -(2s-1)(6s-1)$

$\therefore f'(s) = 0$ となるのは．$s = \dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{2}$

s	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(s)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(s)$	(0)	↘	$-\frac{2}{27}$	↗	0	↘	(-1)

∴ 増減表より，$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ が最大になるのは，

$s = \dfrac{1}{2}$ のときで，このとき．$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

(2)より．$ab = -\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore \underline{P\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)}$ //