2012年 農・工（環境建設）・教育・総合人間 第2問

数理 石井K

2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が条件

$$S_n = 4n - 3a_n$$

を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $a_n > \dfrac{35}{9}$ となる最小の自然数 n を求めよ．ただし，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として計算してよい．

(1) $S_n = 4n - 3a_n$ … (*) に $n=1$ を代入して，$S_1 = a_1$ に注意すると，

$a_1 = 4 - 3a_1$ $\quad \therefore \underline{a_1 = 1}$ //

(2) (*) より，

$S_{n+1} = 4(n+1) - 3a_{n+1}$ … (**)

(**) − (*) より，

$S_{n+1} - S_n = 4 - 3a_{n+1} + 3a_n$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ に注意すると，

$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1$

$\therefore a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4)$

∴ 数列 $\{a_n - 4\}$ は初項 $a_1 - 4 = -3$，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列

$\therefore a_n - 4 = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore \underline{a_n = 4 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$ // ← $a_n = 4\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ などでもよい．

(3) $a_n > \frac{35}{9}$ より，$4 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > \frac{35}{9}$

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{27}$

$\therefore (n-1)\log_{10}\frac{3}{4} < \log_{10} 3^{-3}$

$\therefore (n-1)\cdot(\log_{10}3 - 2\log_{10}2) < -3\log_{10}3$

$0.125\cdot(n-1) > 1.431$

これを解くと，$n > 12.448$ $\quad \therefore \underline{n = 13}$ //