室蘭工業大学

2013年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ p, q を整数とし，$p>0$ とする．数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=36,\quad a_{n+1}=a_n+2pn+q\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

(1) a_n を p, q, n を用いて表せ．

(2) $a_4>0$ かつ $a_5<0$ とする．このとき，p, q の値を求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，$a_n<0$ を満たす n の値をすべて求めよ．

(1) $a_{n+1}-a_n=2pn+q\quad (n=1,2,3,\cdots)$

階差数列の公式より．

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2pk+q\quad (n\geqq 2)$$

$$=36+2p\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+q(n-1)$$

$$=pn^2+(q-p)n+36-q$$

これは $n=1$ のときも成り立っている．$\therefore\ \underline{a_n=pn^2+(q-p)n+36-q}$ //

(2) $a_4=16p+4q-4p+36-q>0\quad \therefore\ 12p+3q+36>0\quad \therefore\ 4p+q+12>0\ \cdots$①

$a_5=25p+5q-5p+36-q<0\quad \therefore\ 5p+q+9<0\ \cdots$②

①－② より．$-p+3>0$　また，$p>0$ より．$0<p<3$

(i) $p=1$ のとき．

① より．$q>-16$　② より $q<-14$　$\therefore\ q=-15$

(ii) $p=2$ のとき

① より，$q>-20$　② より，$q<-19$　$\therefore$ q は存在しない．

(i), (ii) より，$\underline{(p,q)=(1,-15)}$ //

(3) (2) のとき．$a_n=n^2-16n+51$

$\therefore$ $a_n<0$ となるのは．$\dfrac{16-\sqrt{16^2-4\cdot 51}}{2}<n<\dfrac{16+\sqrt{16^2-4\cdot 51}}{2}$　すなわち $8-\sqrt{13}<n<8+\sqrt{13}$

$3<\sqrt{13}<4$ なので，$\underline{n=5,6,7,8,9,10,11}$ //