

2017年第3問

3 原点を中心とする半径3の球面を  $S$  とする. 球面  $S$  上に点  $P(a, b, c)$  を  $a > 0, b > 0, c > 0$  となるようにとり, 以下の条件をみたす直方体  $T$  を考える.

- 直方体  $T$  は点  $P$  を頂点のひとつにもつ.
- 直方体  $T$  は球面  $S$  に内接する.
- 直方体  $T$  の各辺は  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸のいずれかに平行である.
- 直方体  $T$  の表面積は64である.

このとき, 直方体  $T$  の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸に平行な辺の長さは, それぞれ  $2a, 2b, 2c$  である. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $ab + bc + ca$  と  $a + b + c$  の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 関数

$$f(t) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t$$

の増減を調べ, その極値を求めよ.

- (3) 直方体  $T$  の体積を  $V$  とする. 式  $(t - a)(t - b)(t - c)$  を  $f(t)$  と  $V$  を用いて表せ.
- (4) 体積  $V$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (5) 体積  $V$  が最小となる点  $P(a, b, c)$  のうちで,  $a \leq b \leq c$  をみたす点  $P$  の座標を求めよ.