

2016年工学部第1問

1 次の各問題の に適する答えを記入せよ。

- (1) $\sin\theta + \cos\theta = k$ とするとき $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ を k を用いて表すと である。
- (2) $2^{2016} \cdot 3^{2020}$ は 桁の数である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
- (3) ベクトル $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, -3)$ の両方に垂直で、大きさが1のベクトルを成分表示すると となる。

$$\frac{2k(3-k^2)}{(k+1)^2(k-1)^2}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \\ &= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2} \\ &= \frac{k(1 - \sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $\sin\theta + \cos\theta = k$ の両辺を2乗して、 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = k^2$ より、 $\sin\theta\cos\theta = \frac{k^2 - 1}{2}$

∴ ①に代入して、

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{k(1 - \frac{k^2 - 1}{2})}{(\frac{k^2 - 1}{2})^2} = \frac{2k(3 - k^2)}{(k+1)^2(k-1)^2} //$$

- (2)
- $N = 2^{2016} \cdot 3^{2020}$
- とおくと、

$$\begin{aligned} N \text{ が } n \text{ 桁} &\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n \\ &\Leftrightarrow n-1 \leq \log_{10} N < n \end{aligned}$$

∴ $\log_{10} N = 2016 \log_{10} 2 + 2020 \log_{10} 3 \doteq 1570.558 \quad \therefore \underline{1571 \text{ 桁}} //$

- (3) 求めるベクトルを
- $\vec{n} = (p, q, r)$
- とおくと、
- $|\vec{n}| = 1$
- より、
- $p^2 + q^2 + r^2 = 1 \dots \textcircled{1}$

$$\vec{a} \perp \vec{n} \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{n} = p + q + 3r = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\vec{b} \perp \vec{n} \text{ より } \vec{b} \cdot \vec{n} = 2p - 3r = 0 \dots \textcircled{3}$$

②、③より、 $q = -3p$, $r = \frac{2}{3}p$ これを①に代入して、 $p = \pm \frac{3}{\sqrt{94}}$

$$\therefore \underline{\vec{n} = \left(\pm \frac{3}{\sqrt{94}}, \mp \frac{9}{\sqrt{94}}, \pm \frac{2}{\sqrt{94}} \right)} \quad (\text{複号同順}) //$$