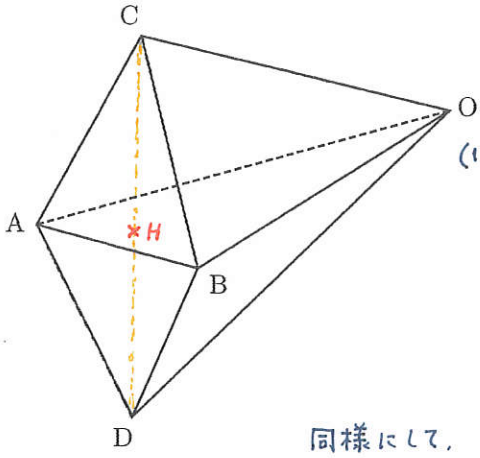
2015年 工学部 第1問　　1枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，三角形ABCは1辺の長さが1の正三角形であり，OA = OB = OC = 2とする．また，点Cを通り平面OABに垂直な直線上に点Dがあり，線分CDの中点Hは平面OABに含まれるとする．すなわち，点Dは平面OABに関して，点Cと対称な点である．



(1) $|\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b}-\vec{a}| = 1$ より．

$1^2 = 2^2 + 2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{2}}$ //

同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{7}{2}$

$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{a} = (\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a}$

$= \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}$

$= \underline{0}$ //

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおいて，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) 直線BHと直線OAの交点をPとする．$\overrightarrow{BP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{a}$ を求めよ．さらに，OPおよびBPの長さを求めよ．

(4) (3)で定めた点Pに対して，四角形BCPDの面積 S を求めよ．また，四角錐O-BCPDの体積 V を求めよ．

(2) 点Hは平面OAB上の点なので，実数 s, t を用いて．

$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる．このとき．$\overrightarrow{CH} = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{CH} \perp$ 平面OABより，$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{CH}\cdot\vec{b} = 0$ が成り立つ

$\therefore \overrightarrow{CH}\cdot\vec{a} = s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{c}\cdot\vec{a} = 4s + \frac{7}{2}t - \frac{7}{2}$　　$\therefore 8s + 7t = 7 \cdots ①$

$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{b} = s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{7}{2}s + 4t - \frac{7}{2}$　　$\therefore 7s + 8t = 7 \cdots ②$

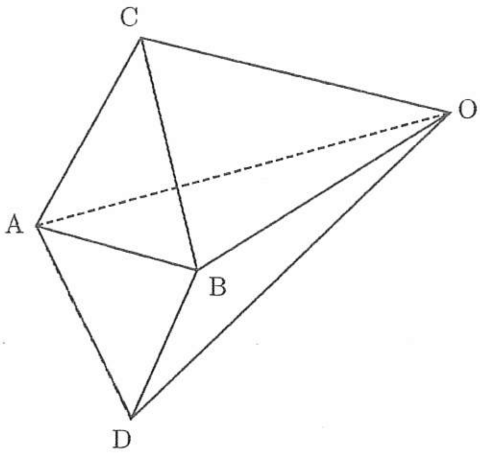
①，②より．$s = t = \frac{7}{15}$　　$\therefore \underline{\overrightarrow{OH} = \frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b})}$ //　　$\therefore \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{CH}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b}) + \frac{7}{15}(\vec{a}+\vec{b}) - \vec{c}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{OD} = \frac{14}{15}\vec{a} + \frac{14}{15}\vec{b} - \vec{c}}$ //

2015年 工学部 第1問　　2枚目／2枚

1 四面体OABCにおいて，三角形ABCは1辺の長さが1の正三角形であり，OA = OB = OC = 2とする．また，点Cを通り平面OABに垂直な直線上に点Dがあり，線分CDの中点Hは平面OABに含まれるとする．すなわち，点Dは平面OABに関して，点Cと対称な点である．



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおいて，次に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．また，$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(3) 直線BHと直線OAの交点をPとする．$\overrightarrow{BP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{a}$ を求めよ．さらに，OPおよびBPの長さを求めよ．

(4) (3)で定めた点Pに対して，四角形BCPDの面積 S を求めよ．また，四角錐O-BCPDの体積 V を求めよ．

(3) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OH} - \vec{b} = \frac{7}{15}\vec{a} - \frac{8}{15}\vec{b}$

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BH}$ と表せるので，$\overrightarrow{BP} = \frac{7}{15}k\vec{a} - \frac{8}{15}k\vec{b}$ …③

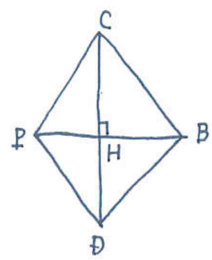
一方，点Pは線分OA上にあるので，$\overrightarrow{OP} = l\vec{a}$ と表せる　∴ $\overrightarrow{BP} = l\vec{a} - \vec{b}$ …④

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立より，$\frac{7}{15}k = l$，$\frac{8}{15}k = 1$　∴ $k = \frac{15}{8}$，$l = \frac{7}{8}$　∴ $\underline{\overrightarrow{BP} = \frac{7}{8}\vec{a} - \vec{b}}$ //

$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{a} = \frac{7}{8}|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = \underline{0}$ //　$\underline{|\overrightarrow{OP}| = \frac{7}{8}\cdot 2 = \frac{7}{4}}$ //

$|\overrightarrow{BP}|^2 = \frac{49}{64}|\vec{a}|^2 - \frac{7}{4}\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = \frac{49}{16} - \frac{49}{8} + 4 = \frac{15}{16}$　∴ $\underline{|\overrightarrow{BP}| = \frac{\sqrt{15}}{4}}$ //

(4) 右図より．$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CH}|\cdot|\overrightarrow{BP}|\cdot 2 = |\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{BP}|$



ここで，(2)より．$\overrightarrow{CH} = \frac{7}{15}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b} - \vec{c}$　∴ $|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{11}{15}}$

∴ $S = \sqrt{\frac{11}{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{11}}{4}}$ //　$V = S\cdot|\overrightarrow{OP}|\cdot\frac{1}{3} = \underline{\frac{7}{48}\sqrt{11}}$ //