大阪府立大学

数理 石井K

2016年 文系 第3問

3 以下の問いに答えよ．

(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\sin\beta$$

(2) k，n を自然数とし，θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとする．(1) の等式で $\alpha=k\theta$，$\beta=\theta$ とおくことにより次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos^2\frac{k\pi}{100}$ の値を求めよ．

(1) (左辺) $=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha-\cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta-\sin^2\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\sin\beta$

$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\beta$

$=\cos 2\alpha\sin\beta$

$=$ (右辺) ■

(2) (1) に $\alpha=k\theta$，$\beta=\theta$ を代入して，

$\cos(k+1)\theta\sin k\theta-\cos k\theta\sin(k-1)\theta=\cos 2k\theta\sin\theta$

両辺，$\sin\theta\ (\neq 0)$ で割って

$$\cos 2k\theta=\frac{\cos(k+1)\theta\sin k\theta-\cos k\theta\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$k=1, 2, \cdots, n$ の和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{1}{\sin\theta}\Big\{\underbrace{\cos 2\theta\sin\theta-\cos\theta\overset{0}{\sin 0}}_{k=1}+\underbrace{\cos 3\theta\sin 2\theta-\cos 2\theta\sin\theta}_{k=2}+\underbrace{\cos 4\theta\sin 3\theta-\cos 3\theta\sin 2\theta}_{k=3}$$

$$+\cdots+\underbrace{\cos n\theta\sin(n-1)\theta-\cos(n-1)\theta\sin(n-2)\theta}_{k=n-1}+\underbrace{\cos(n+1)\theta\sin n\theta-\cos n\theta\sin(n-1)\theta}_{k=n}\Big\}$$

これだけ残る！

$$=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}\quad ■$$

(3) (与式) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{k\pi}{50}\right)$ ← 半角の公式より

$=50+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos 2k\cdot\frac{\pi}{100}$

これは (2) において，$n=100$，$\theta=\dfrac{\pi}{100}$ を代入したもの

$\therefore\ \sin n\theta=\sin\pi=0$ であるから 0 になる．

$=\underline{50}$ //