

2015年人間科学第4問


 数理石井K

4 Oを原点とし、2点A(\vec{a}), B(\vec{b})に関して、 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$ であるとき、以下の問に答えよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。
 (マ) 3, (ニ) 2

(2) 三角形OABの外心をHとすると、 $\vec{OH} = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{ハ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}\vec{b}$ である。
 (ム) 1, (ハ) 3, (モ) 4, (ヤ) 9

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 16$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 16$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

(2) $\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおくと。

$$OH = AH = BH \text{ であり。}$$

$$|\vec{OH}|^2 = 4s^2 + 9t^2 + 3st$$

$$|\vec{AH}|^2 = |\vec{OH} - \vec{OA}|^2$$

$$= |(s-1)\vec{a} + t\vec{b}|^2$$

$$= 4(s-1)^2 + 9t^2 + (s-1)t \cdot 3$$

$$|\vec{BH}|^2 = |\vec{OH} - \vec{OB}|^2$$

$$= 4s^2 + 9(t-1)^2 + s(t-1) \cdot 3$$

$$\therefore |\vec{OH}|^2 = |\vec{AH}|^2 \text{ より } 8s + 3t = 4 \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{OH}|^2 = |\vec{BH}|^2 \text{ より } 3s + 18t = 9 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } s = \frac{1}{3}, t = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$$