

2017年神学・経済第4問

4 正の整数 a と b の最大公約数は、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を使って以下のように求めることができる。

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ を } b_n \text{ で割った余り} & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ b_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

a_n を b_n で割った商を q_n とし、 N は $b_N = 0$ を満たす最小の自然数とする。このとき、 a_N が a と b の最大公約数となる。

(1) $a = 81$, $b = 63$ のとき、 $a_3 =$, $b_3 =$, $N =$ である。

(2) 81 と 63 の最大公約数は である。

(3) 以上の計算により、

$$81 = 63q_1 + b_k$$

$$63 = b_kq_2 + 9$$

という関係が成り立つ。このとき、 $k =$ である。この2つの式から b_k を消去することで、不定方程式 $81x + 63y = 9$ を満たす整数 x , y の組のうち、 $-10 < x < 4$ となるものは、 $x =$, $y =$ であることがわかる。