

2016年文系第1問

 数理
石井K

1 次の問いに答えなさい。

(1) $x = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$, $y = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$ のとき $x^3y + x^2 + xy^3 + y^2$ の値を求めなさい。

(2) ω が無理数であるとき $5+17\omega$ も無理数であることを示しなさい。

(3) $a > 0$ とするとき、直線 $y = ax$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする。このとき $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$ をそれぞれ a で表しなさい。

(4) 1個300円のリンゴと1個120円のみかんを合わせて30個買い、1箱200円の紙箱1箱に詰めてもらう。果物代と箱代の合計金額を6,000円以下にすると、リンゴは最大で何個買えるか。

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3y + x^2 + xy^3 + y^2 &= x^2(xy+1) + y^2(xy+1) \\ &= (xy+1)(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})^2}{(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{11}-\sqrt{7})} = \frac{18-2\sqrt{77}}{4} = \frac{9-\sqrt{77}}{2} \quad \text{同様にして } y = \frac{9+\sqrt{77}}{2}$$

$$\therefore x+y=9, \quad xy=1$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 9^2 - 2 \cdot 1 = 79$$

$$\therefore (\text{手式}) = 2 \cdot 79 = \underline{158}$$

(2) 背理法で示す。

$5+17\omega$ が有理数であると仮定すると、 $5+17\omega = \frac{q}{p}$ (p, q は整数) と表せる。

$$\therefore \omega = \frac{q-5p}{17p}$$

$q-5p, 17p$ はともに整数であるから、 ω は有理数となり、矛盾。

$\therefore 5+17\omega$ は無理数 \square

(3) $\tan\theta = a$ であるから、 $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して、 $\cos^2\theta = \frac{1}{a^2+1}$ //

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \text{ より、} \quad \sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+1} \quad \tan^2\theta = a^2 //$$

(4) リンゴを n 個、とすると、みかんは $(30-n)$ 個。

$$300n + 120(30-n) + 200 \leq 6000 \iff 180n \leq 2200$$

$$\iff n \leq \frac{110}{9} \quad \therefore \underline{121 \text{ 個}} //$$