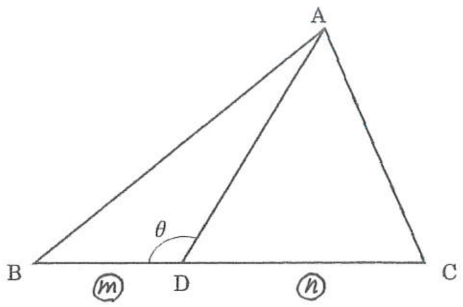
2016年 文系 第2問

数理 石井K

2 △ABCにおいて，辺BC上にBD：DC＝m：nとなる点Dをとります．このとき，次の問いに答えなさい．



(1) nAB^2+mAC^2をAD，BD，CDとm，nを用いて表しなさい．

(2) AB＝3，BC＝4，CA＝2，m：n＝1：3のとき，$\cos\theta$を求めなさい．ただし，θは∠BDAとします．

(1) 余弦定理より

$$nAB^2+mAC^2=n(AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cos\theta)+m(AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos(180^\circ-\theta))$$

$$=(m+n)AD^2+nBD^2+mCD^2-2n\cdot AD\cdot BD\cos\theta+2m\cdot AD\cdot CD\cos\theta$$

$$=(m+n)AD^2+nBD^2+mCD^2+2AD\cos\theta(mCD-nBD)$$

ここで，$mCD-nBD=0$であるから（∵ $BD:DC=m:n$ より）

$$\underline{nAB^2+mAC^2=(m+n)AD^2+nBD^2+mCD^2}\,/\!/$$

(2) (1)で求めた式に代入して．($m=k$, $n=3k$とおく)

$$3k\cdot9+k\cdot4=4k\cdot AD^2+3k\cdot1+k\cdot9$$

$$\therefore 27+4=4AD^2+12$$

$$\therefore AD^2=\frac{19}{4}\quad\therefore AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1+\frac{19}{4}-9}{2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{19}}{2}}$$

$$\underline{=-\frac{13\sqrt{19}}{76}}\,/\!/$$