2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $k$を定数とする．関数 $f(x)=x^2-kx+3k-5$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が，異なる2つの実数解をもつような $k$ の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が，ともに2以下となる異なる2つの解をもつような $k$ の値の範囲を求めよ．

(3) $1 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値を $m(k)$ とする．このとき，$0 \leqq k \leqq 10$ における $m(k)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(1) $f(x)=0$ の判別式を $D$ とすると，$D>0$ であるから

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(3k-5)$

$=k^2-12k+20$

$=(k-2)(k-10)$

$\therefore (k-2)(k-10)>0$

$\therefore \underline{k<2,\ 10<k}$ // …①

(2) 2つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

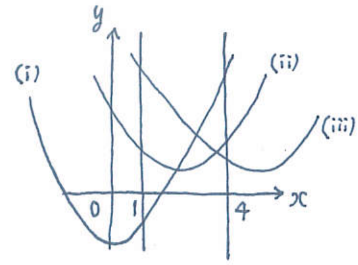
① かつ $(\alpha-2)+(\beta-2)\leqq 0$ かつ $(\alpha-2)(\beta-2)\geqq 0$

$(k<2,\ 10<k)$ かつ $\alpha+\beta\leqq 4$ かつ $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\geqq 0$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=3k-5$ であるから

$(k<2,\ 10<k)$ かつ $k\leqq 4$ かつ $k\geqq 1$

$\therefore \underline{1\leqq k<2}$ //




(3) 軸は $x=\dfrac{k}{2}$ であるから

(i) $0\leqq \dfrac{k}{2}<1$ すなわち $0\leqq k<2$ のとき，

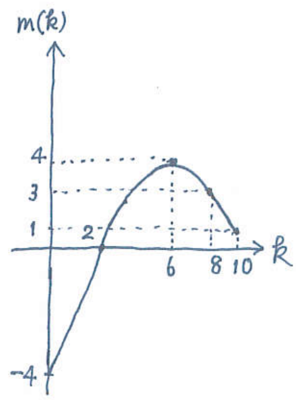
$f(x)$ の最小値は $1\leqq x\leqq 4$ において，$m(k)=f(1)=2k-4$

(ii) $1\leqq \dfrac{k}{2}\leqq 4$ すなわち $2\leqq k\leqq 8$ のとき，

$m(k)=f\left(\dfrac{k}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}k^2+3k-5=-\dfrac{1}{4}(k-6)^2+4$

(iii) $4<\dfrac{k}{2}\leqq 5$ すなわち $8<k\leqq 10$ のとき，

$m(k)=f(4)=-k+11$




(i)〜(iii)より，$y=m(k)$ のグラフは右のようになる

$\therefore$ $\underline{\text{最大値 } 4\ (k=6\text{ のとき})，\text{最小値 } -4\ (k=0\text{ のとき})}$ //