滋賀大学

2014年 第4問

4 kを正の定数とする．円$C : x^2+y^2-4x-2y+1=0$と共有点をもたない直線$\ell : y=-\frac{1}{2}x+k$について，次の問いに答えよ．

(1) kのとりうる値の範囲を求めよ．

(2) ℓ上の2点A，Bの座標をそれぞれ$(2,\ k-1)$，$(2k-2,\ 1)$とする．点PがC上を動くとき，△PABの重心Qの軌跡を求めよ．

(3) (2)で求めたQの軌跡とCがただ1つの共有点をもつとき，kの値を求めよ．

(1) $C : (x-2)^2+(y-1)^2=2^2$ より．円の中心は$(2, 1)$，半径は2

∴点と直線のキョリ公式より，$\dfrac{|2+2-2k|}{\sqrt{2^2+1^2}} > 2$

$|4-2k| > 2\sqrt{5}$

(i) $0<k\leqq 2$ のとき．$4-2k>2\sqrt{5}$　∴ $k<2-\sqrt{5}\ (<0)$ 不適

(ii) $k>2$ のとき　$2k-4>2\sqrt{5}$　∴ $k>2+\sqrt{5}$

(i)，(ii)より，$\underline{k>2+\sqrt{5}}$ //

(2) $P(s, t)$ とおくと，

$Q\left(\dfrac{2k+s}{3}, \dfrac{k+t}{3}\right)$　∴ $X=\dfrac{2k+s}{3}$，$Y=\dfrac{k+t}{3}$ とおくと，

$s=3X-2k$，$t=3Y-k$

これをCの方程式に代入して，$\left(X-\dfrac{2(k+1)}{3}\right)^2+\left(Y-\dfrac{k+1}{3}\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

∴ Qの軌跡は $\underline{\left(\dfrac{2k+2}{3}, \dfrac{k+1}{3}\right)\text{を中心とする半径}\dfrac{2}{3}\text{の円}}$ //

(3) $$\underbrace{\sqrt{\left(\frac{2k+2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{k+1}{3}-1\right)^2}}_{\text{中心間のキョリ}} = \underbrace{2+\frac{2}{3}}_{\text{半径の和}}$$

これを解いて，$k>0$ より $\underline{k=\dfrac{10+8\sqrt{5}}{5}}$ //