岡山大学

2013年 文系 第4問

$\boxed{4}$ Cをxy平面上の放物線$y=x^2$とする．不等式$y<x^2$で表される領域の点PからCに引いた2つの接線に対して，それぞれの接点のx座標をα，$\beta\,(\alpha<\beta)$とする．また，2つの接線とCで囲まれた部分の面積をSとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，等式

$$\int_p^q (x-p)^2\,dx=\frac{(q-p)^3}{3}$$

を用いてもよい．

(1) 点Pの座標$(a,\ b)$をα，βを用いて表せ．

(2) $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$を示せ．

(3) 点Pが曲線$y=x^3-1\,(-1\leqq x\leqq 1)$上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$の値の範囲を調べよ．さらに，$S$の最大値および最小値を与える点Pの座標を求めよ．