2015年 医学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ aを定数とする．$x>0$における関数

$$f(x)=\log x+ax^2-3x$$

について，曲線$y=f(x)$は$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$で変曲点をもつとする．

(1) aを求めよ．

(2) kを定数とするとき，方程式$f(x)=k$の異なる実数解の個数を求めよ．

(3) 曲線$y=f(x)$とx軸，および2直線$x=1$，$x=2$で囲まれた部分を，x軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-3$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2a$

$\therefore$ $y=f(x)$は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$で変曲点をもつ $\Longrightarrow f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$

であるから，$-2+2a=0$　$\therefore a=1$

逆にこのとき，$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}-3=2\sqrt{2}-3\neq 0$ となり，これは変曲点となる．$\therefore$ $\underline{a=1}$ //

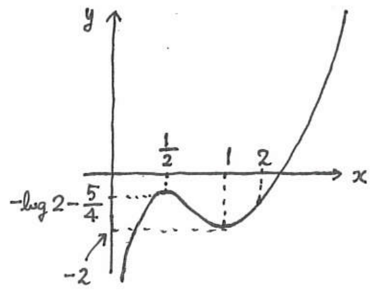
(2) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3=\dfrac{(x-1)(2x-1)}{x}$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{1}{2}$，1

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ と増減表より，

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↗	$-\log 2-\frac{5}{4}$	↘	-2	↗

$\therefore$ 右下のグラフになり，

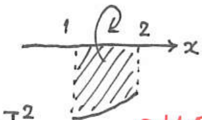


$\begin{cases} k>-\log 2-\frac{5}{4},\ k<-2 \text{ のとき　1個．} \\ k=-\log 2-\frac{5}{4},\ -2 \text{ のとき．2個．} \\ -2<k<-\log 2-\frac{5}{4} \text{ のとき．3個} \end{cases}$ //

(3) $f(2)=\log 2-2<0$

$\therefore V=\pi\displaystyle\int_1^2(\log x+x^2-3x)^2\,dx$

$=\pi\displaystyle\int_1^2(\log x)^2+2(x^2-3x)\log x+x^4-6x^3+9x^2\,dx$



$=\pi\displaystyle\int_1^2(x)'(\log x)^2\,dx+2\pi\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)'\log x\,dx+\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}x^4+3x^3\right]_1^2$

2枚目につづく

2015年 医学部 第1問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ aを定数とする．$x>0$における関数

$$f(x)=\log x+ax^2-3x$$

について，曲線 $y=f(x)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で変曲点をもつとする．

(1) aを求めよ．

(2) kを定数とするとき，方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(3)の計算のつづき．

$$V=\pi\left[x(\log x)^2\right]_1^2-\pi\int_1^2 2\log x\,dx+2\pi\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\log x\right]_1^2-2\pi\int_1^2\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}x\,dx+\pi\left(\frac{31}{5}+\frac{3}{2}-3\right)$$

$$=2\pi(\log 2)^2-2\pi\int_1^2(x)'\log x\,dx+2\pi\left(-\frac{10}{3}\log 2\right)-2\pi\left[\frac{x^3}{9}-\frac{3}{4}x^2\right]_1^2+\frac{47}{10}\pi$$

$$=2\pi(\log 2)^2-2\pi\left[x\log x\right]_1^2+2\pi\int_1^2 dx-\frac{20}{3}\pi\log 2+\frac{53}{36}\cdot 2\pi+\frac{47}{10}\pi$$

$$=2\pi(\log 2)^2-4\pi\log 2+2\pi-\frac{20}{3}\pi\log 2+\frac{344}{45}\pi$$

$$=\underline{2\pi(\log 2)^2-\frac{32}{3}\pi\log 2+\frac{434}{45}\pi}\ //$$