0002083726197999

滋賀医科大学

2015年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

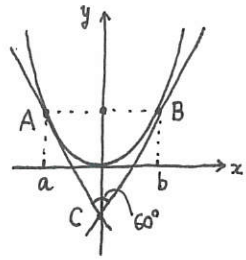
$\boxed{2}$ $a<b$ とする．放物線 $y=x^2$ 上の2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ におけるそれぞれの接線の交点を C とおく．$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$ であるとする．

(1) $a+b=0$ のとき，a を求めよ．

(2) ある正の実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-k(1,\ 2a)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=k(1,\ 2b)$ と表されることを示せ．

(3) $a<-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$b>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ を示せ．

(4) b を a を用いて表せ．



(1) $y'=2x$ より．点Aにおける接線は．

$y=2a(x-a)+a^2$　すなわち　$y=2ax-a^2$

∴ $a+b=0$ のとき．図形の対称性から右のようになり．

$C(0,-a^2)$ となる．∴ ABの中点をMとおくと．$\mathrm{AM}:\mathrm{MC}=1:\sqrt{3}$ より

$-a:2a^2=1:\sqrt{3}$　　∴ $a(2a+\sqrt{3})=0$　　$a\neq0$ より．　$\underline{a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ //

(2) (1)より．Aにおける接線は $y=2ax-a^2$，同様に，Bにおける接線は．$y=2bx-b^2$

∴ これらの交点を求めて，$C\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

∴ $\overrightarrow{CA}=\left(\dfrac{a-b}{2},\ a^2-ab\right)=\dfrac{a-b}{2}(1,2a)$，$\overrightarrow{CB}=\left(\dfrac{b-a}{2},\ b^2-ab\right)=\dfrac{b-a}{2}(1,2b)$

∴ $k=\dfrac{b-a}{2}>0$ ととれば　題意は示された ■

(3) (2)より．$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-k^2(1+4ab)$ となるが，$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ のなす角は60°なので

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$ となる　∴ $1+4ab<0$　　∴ $ab<-\dfrac{1}{4}$

$a<b$ より．　$a<0<b$ …①

tanの加法定理より．

$\tan60^\circ=\dfrac{2a-2b}{1+2a\cdot2b}$　　∴ $\sqrt{3}=\dfrac{2(a-b)}{1+4ab}$

∴ $\sqrt{3}+4\sqrt{3}ab-2a+2b=0$

∴ $ab-\dfrac{\sqrt{3}}{6}a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}b+\dfrac{1}{4}=0$ …②

$\left(a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(b-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}<0$

これより．次の2通りが考えられる．

$\begin{cases}\bullet\ a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}<0 \text{ かつ } b-\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0 \text{（こっちが示したい方）}\\ \bullet\ a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0 \text{ かつ } b-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<0\end{cases}$

2枚目につづく

0002083726197999

滋賀医科大学

2015年 医学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ $a<b$ とする．放物線 $y=x^2$ 上の2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ におけるそれぞれの接線の交点を C とおく．$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$ であるとする．

(1) $a+b=0$ のとき，a を求めよ．

(2) ある正の実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-k(1,\ 2a)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=k(1,\ 2b)$ と表されることを示せ．

(3) $a<-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$b>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ を示せ．

(4) b を a を用いて表せ．

(3) $a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0$ かつ $b-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<0$ と仮定すると．

$a>-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ かつ $b<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　これと ① より．$-\dfrac{\sqrt{3}}{6}<a<0<b<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore -\dfrac{1}{12}<ab<0$　これは $ab<-\dfrac{1}{4}$ に反する

以上より．$a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}<0$ かつ $b-\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0$　すなわち $a<-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$b>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ▨

(4) (3)の②より．

$$\left(a+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)b=\frac{\sqrt{3}}{6}a-\frac{1}{4}$$

$a+\dfrac{\sqrt{3}}{6}<0$ より．

$$b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$=\underline{\frac{2\sqrt{3}a-3}{12a+2\sqrt{3}}}\ /\!/$$