

2016年 医学部 第2問

2 分母が奇数, 分子が整数の分数で表せる有理数を「控えめな有理数」と呼ぶことにする. 例えば $-\frac{1}{3}$, 2 はそれぞれ $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{1}$ と表せるから, ともに控えめな有理数である. 1個以上の有限個の控えめな有理数 a_1, \dots, a_n に対して, 集合 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ を,

$$S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid x_1, \dots, x_n \text{ は控えめな有理数}\}$$

と定める. 例えば 1 は $1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot 2$ と表せるから, $S\langle -\frac{1}{3}, 2 \rangle$ の要素である.

- (1) 控えめな有理数 a_1, \dots, a_n が定める集合 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ の要素は控えめな有理数であることを示せ.
- (2) 0 でない控えめな有理数 a が与えられたとき, $S\langle a \rangle = S\langle 2^t \rangle$ となる 0 以上の整数 t が存在することを示せ.
- (3) 控えめな有理数 a_1, \dots, a_n が与えられたとき, $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = S\langle b \rangle$ となる控えめな有理数 b が存在することを示せ.
- (4) 2016 が属する集合 $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ はいくつあるか. ただし a_1, \dots, a_n は控えめな有理数であるとし, a_1, \dots, a_n と b_1, \dots, b_m が異なっても, $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle = S\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ であれば, $S\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ と $S\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ は一つの集合として数える.