0001817812818999

中部大学

2014年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $0 < x < \pi$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ．

(2) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，$f''(x) > 0$ となることを示せ．これらの結果を増減表に書き，曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ に対し，$0 < a \leqq x < \pi$ を満たす任意の a と x を考えると，

$$tf(a) + (1-t)f(x) \geqq f(at + (1-t)x)$$

が成り立つことを示せ．

(4) 三角形 ABC のそれぞれの角を A，B，C とすると $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \geqq 2\sqrt{3}$ が成り立つことを証明せよ．

(1) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ //

(2) $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = \underline{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}$ //

$f''(x) = \dfrac{\sin x \cdot \sin^2 x - (-\cos x)\cdot 2\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x}$

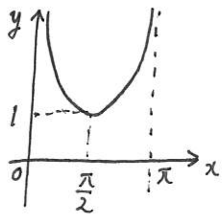
$= \underline{\dfrac{2 - \sin^2 x}{\sin^3 x}}$ //

ここで，$0 < x < \pi$ より $0 < \sin x \leqq 1$

また，$0 < \sin^2 x \leqq 1$ $\therefore 2 - \sin^2 x > 0$

$\therefore f''(x) > 0$ ■

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi - 0} f(x) = +\infty$



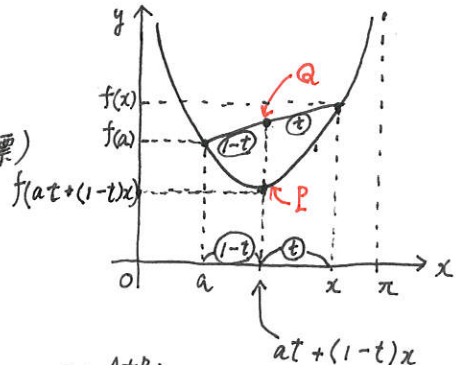
x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

(3) 右図の P の y 座標は $f(at + (1-t)x)$

〃 Q の 〃 $tf(a) + (1-t)f(x)$

$y = f(x)$ は (2) より 下に凸 なので，(Q の y 座標) $\geqq$ (P の y 座標)

$\therefore tf(a) + (1-t)f(x) \geqq f(at + (1-t)x)$ ■



(4) $t = \frac{1}{2}$ として (3) より

$\dfrac{f(A) + f(B)}{2} \geqq f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

$\therefore f(A) + f(B) + f(C) \geqq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f(C)$

$= 3\left\{\frac{2}{3} f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{1}{3} f(C)\right\}$

$t = \frac{2}{3}$ として (3) を使う

$\geqq 3 f\left(\frac{A+B}{3} + \frac{C}{3}\right)$

$= 3 f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ ■