



2014年理系第5問

5 r を 0 以上の整数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、素数 p を 1 つとり、 a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし、0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し、 b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r = 2$, $p = 17$ の場合に、10 以下のすべての自然数 n に対して、 b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n , m に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき、 $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2, a_3, a_4, \dots に p で割り切れる数が現れないとする。このとき、 a_1 も p で割り切れないことを示せ。